# Övning 6.9 - 4-dimensionellt rum

February 7, 2019

Beskriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 & = & y_2 \\ 2x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 & = & y_3 \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & y_4 \end{cases}$$

med hjälp av vektorerna $a_1 = (1, 2, 2, 0)$, $a_2 = (2, -1, 0, 2)$, $a_3 = (2, 0, -1, -2)$, $a_4 = (0, 2, 2, 1)$ och $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. För vilka $y$ har ekvationsystemet entydig lösning?

**Lösn:** Systemet kan skrivas som $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = y$. Om man skriver vektorerna som *kolonner* i st f radvis, ser man direkt att konstanterna framför varje $x_k$ i ekvationsystemet motsvarar vektorn $a_k$. Man kan få entydig lösning för alla $y$ om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Detta kan testas genom att lösa istället systemet $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = 0$, (där 0 betecknar nollvektorn i $\mathbb{R}^4$). Finns det entydig lösning till det, så finns det även för alla $y \in \mathbb{R}^4$. Lösbarheten testas genom att tillämpa gausselimination på systemet

$$\left\{\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & -18 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 37 \end{array}\right.$$

Man har 4 pivotelement, dvs 4 linjärt oberoende vektorer, dvs att ekvationen $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = 0$ har endast en lösning, nämligen $x_1 = 0 = x_2 = x_3 = x_4$. Därmed är $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ en bas och ekvationen $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = y$ har entydig lösning för alla $y \in \mathbb{R}^4$.