Övning 7.27 - Minsta kvadratmetoden (i smyg)

February 14, 2019

Betrakta matrisen A och vektorn Y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Visa att ekvationsystemet $AX = Y$ saknar lösning.
b. Lös ekvationen $A^T AX = A^T Y$.

Lösn: För a. börjar vi med gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Ekvationsystemet saknar lösning, vilket syns tydligt på fjärde raden. För b., räknar vi först

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nu löser vi med gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right],$$

med lösning $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ och $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Som exempel kan vi göra baklängessubstitution på detta system, dvs att först delar vi varje ekvation med en konstant så att alla pivåelement blir 1, sedan kombinerar vi raderna så att alla matriselement över diagonalen blir noll:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Substitutionerna blev först $[2] - \dfrac{1}{3}[3] = [2']$, sedan $[1] - \dfrac{1}{2}[3]$ och sist $[1] - \dfrac{1}{2}[2']$. Baklängessubstitutionen ger identitetsmatrisen på vänstersidan och lösningen i den högra kolonnen.

Hur kopplas detta till minsta kvadratmetoden? När man har för många ekvationer och för få okända, är det vanligt att lösningen saknas. Däremot finns det lösning för ett annat relaterat problem, nämligen *minsta kvadratslösningen*. Se en separathäfte om detta.