Övning 7.30 - Matrisekvationer

February 22, 2019

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös ekvationsystemet

$$\begin{aligned} AX + Y &= A \\ X + AY &= I + A \end{aligned}$$

där X, Y och identitetsmatrisen I är 3×3 matriser.

Lösn: Multiplicera första ekvationen med A för att få $A^2X + AY = A^2$ och substrahera ekvationerna för att eliminera Y:

$$\left(I - A^2\right) X = I + A - A^2.$$

Verifiera på egen hand att matrisen $\left(I - A^2\right)$ är inverterbar (kolla t ex att kolonnerna är linjärt oberoende). Lös ovanstående ekvationen för X och lös sedan Y ur första ekvationen:

$$\begin{aligned} X &= \left(I - A^2\right)^{-1} \left(I - A^2 + A\right) = I + \left(I - A^2\right)^{-1} A \\ Y &= A - AX \end{aligned}$$

Nu återstår bara att räkna matriserna:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
I - A^2 &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
\left(I - A^2\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$