Övning 7.34 - Fler matrisekvationer

February 22, 2019

Lös ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösn. Vad är X för matris? om X har m rader och n kolonner då säger matrisprodukten att $(4\times4)\cdot(m\times n) = (4\times3)$, dvs att även X är en (4×3) matris. Kalla matrisen till vänster för A. Problemet kan lösas snabbt om matrisen A vore inverterbar. Ett sätt att reda ut det är att testa ifall kolonnerna i A är linjärt oberoende vektorer, vilket är samma som att beräkna antalet lösningar till ekvationen $AY = 0$, med Y en kolonnvektor.

Vi gör detta via gausselimination:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right.$$

Ja, matrisen har 4 pivotelement och ekvationen $AY = 0$ har endast lösningen $Y = 0$ (nollvektorn). Då kan vi gå vidare med matrisinvers, dvs

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$