Uppg 6 extentan 181001

March 11, 2019

Lös ekvationen $AX - AB = AXC$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Om A är inverterbar, så kan ekvationen förenklas eftersom

$$\begin{aligned} AX - AB &= A(X - B) = AXC \\ A^{-1}A(X - B) &= A^{-1}AXC \\ X - B &= XC \\ X - XC &= B \\ X(I - C) &= B \\ X &= B(I - C)^{-1} \end{aligned}$$

Vi konstaterar att A är inverterbar eftersom $\det A = 22 + 15 = 37 \neq 0$. Dessutom är

$$I - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $I - C$ är ortogonal och symmetrisk, varefter $(I - C)^{-1} = (I - C)$. Därmed blir

$$X = B(I - C)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}.$$