Teori för matrisinvers

February 11, 2019

Här skall vi kommentera och bevisa följande påståenden:

1. Om en matris A har vänsterinvers V och högerinvers H, så är de lika.
2. Om en matris A är inverterbar, så är inversen entydig.
3. Om en matris har vänsterinvers så har ekvationen $AX = 0$ endast en lösning.
4. Om ekvationssystemet $AX = Y$ har lösning för alla Y, så har matrisen A en högerinvers.
5. Om en matris A har vänster- eller högerinvers, så är den inverterbar.

Kommentar

Punkterna 1., 2. och 5. säger att i fall inversen existerar, så finns det bara en sådan, och då räcker det att räkna ut högerinversen. Lyckas man med det så är det klart. Punkterna 3. och 4. säger då vidare att när inversen finns, kolonnerna i matrisen A bildar en bas, dvs de är linjärt oberoende och ekvationsystemet $AX = Y$ har entydig lösning för alla Y, inklusive $Y = 0$.

Det interessanta här är att högerinversen kan beräknas med gausselimination. Om man lyckas med det, så får man ut $n-$stycken pivåelement och matrisen A transformeras till en matris G som har noll under diagonalen och ettor i diagonalen (efter lämplig division, vid behov). Om man misslyckas med gausselimination, så är kolonnerna i A inte en bas, dvs att de är linjärt oberoende, och då har ekvationsystemet $AX = 0$ oändligt många lösningar (parameterlösning) samtidigt som det finns vissa Y sådana att lösningen för $AX = Y$ saknas.

Bevis

Först måste man komma ihåg att identitetsmatrisen fungerar som talet 1 i vanlig multiplikation, dvs att $A \cdot I = I \cdot A = A$. Det är bara att göra produkterna. Också är det så att noll matrisen ger som resultat noll när man multiplicerar det med en annan matris, dvs att $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$. Nu går vi till punkterna:

1. Betrakta $VAH = (VA)H = IH = H$ men samtidigt är $VAH = V(AH) = VI = V$, dvs $V = H$.
2. Kalla inversen av A med namnet A^{-1}. Anta nu att det finns en annan matris B sådan att $AB = BA = I$. Då gäller att $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA = A$. Alltså är B samma matris som A^{-1}, det finns ingen annan.
3. Eftersom V finns, kan vi skriva $VAX = V0$, dvs $(VA)X = X = V0 = 0$, dvs att $X = 0$ är enda lösningen.
4. Precis på detta sätt konstruerade vi högerinvers. Vi väljer följande vektorer Y:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

matrisen H som i kolonn k har lösningen X_k till ekvationen $AX = Y_k$ uppfyller $AH = I$.

5. On en utav höger- och vänsterinvers finns, så finns det även den andra, eftersom punkt 3. och 4. relaterar inverserna till att kolonnerna i matrisen A utgör en bas (tidigare sats i kap. 7). Punkt 1 ger då att inversen existerar.

Sammanfattningsvis

Vi kan lägga ytterligare en rad i huvudsatsen. För en kvadratisk matris A är följande påståenden ekvivalenta:

1. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.
2. Ekvationsystemet $AX = 0$ har endast en lösning.
3. Ekvationsystemet $AX = Y$ har lösning för alla $Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (dvs alla vektorer $y \in \mathbb{R}^n$).
4. Matrisen A är inverterbar.