Om linjer och plan i parameterform

February 1, 2019

Betrakta linjerna:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 - 6t \end{cases} \quad \text{och } l_2 : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = 10 - 2s \\ z = -7 + 3s \end{cases}$$

Är det något speciellt med dessa linjer? Hur kan vi avgöra om de är skilda från varandra, eller skär varandra i en punkt, eller är rentav samma linje? Tänk på att en linje bestäms av exakt två (skilda) punkter i rummet. Det finns bara en linje som går genom två valda punkter. Ett sätt att jämföra linjerna vore att plocka två skilda punkter på den ena linjen och testa i fall de tillhör även den andra linjen. Om bägge punkter finns på båda linjerna, så är det samma linje, trots att ekvationerna ser olika ut. Om bara en av punkterna finns på båda, så skär linjerna varandra i den punkten. Om ingen av de två valda punkter finns på l_2 kan vi inte säga något mer. I så fall är de ju inte samma linje, men de skulle kunna skära varandra på en tredje punkt som vi råkade missa, eller vara helt skilda.

Vi väljer då punkterna $P : (1, 2, 5)$ och $Q : (3, 6, -1)$ på linjen l_1. Om punkten P skall finnas på l_2 så behöver vi att $s = 4$, för att x-koordinaten ska stämma, ty $1 = 5 - 4$. I så fall räknar vi $10 - 2 \times 4 = 2$ och $-7 + 3 \times 4 = 5$. Ja, punkten P återfinns på l_2, för parametervärdet $s = 4$. För Q säger första koordinaten att vi behöver $s = 2$. I så fall är $10 - 2 \times 2 = 6$ och $-7 + 3 \times 2 = -1$. Q tillhör också l_2. Alltså är l_1 och l_2 **samma** linje. Alla punkter på den ena linjen finns med på den andra och omvänt.

Slutsats: Man skall inte låta sig luras av olika parameterframställningar utan vidare. Generellt kan man säga att man har friheten att välja utseende på parametern genom att klokt välja konstanter a, b sådana att $a \neq 0$ och $s = at + b$. Om t löper genom alla reella tal, så gör s också det. I exemplet ovan kan man konstatera att $s = 4 - 2t$.

Motsvarande fråga kan vi ställa kring följande plan:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t - s \\ y = 2 + 4t - 2s \\ z = 5 - 6t + 3s \end{cases} \quad \text{och } \pi_2 : \begin{cases} x = 5 - p - 3q \\ y = 10 - 2p + 10q \\ z = -7 + 3p - 15q \end{cases}$$

Man kanske inte ser direkt att det handlar om samma plan, men försök exempelvis skriva planen på parameterform och konstatera att bägge plan svarar mot $3y + 2z - 16 = 0$.