Minsta kvadratmetoden

February 14, 2019

Se sista avsnittet i kap. 7, sid 155-156.

Överbestämda system kallas de som innehåller fler ekvationer än obekanta.

Betrakta frågan om hur mycket ström går åt att visa en film på bio. Det kan bero på filmens längd L (då är projektorn igång och drar ström) och på publikens storlek N, eftersom det behövs en viss mängd ventilation per person i lokalen. Då förväntar vi oss att $E = \alpha L + \beta N$. Sedan mäter vi (E, L, N) under en vecka på biografen, dvs ca 25 olika föreställningar. Vi får 25 ekvationer med 2 obekanta i formen $AX = Y$, där X representerar våra obekanta α, β, A är en $m \times n$ matris med $m > n$ (i detta fall 25×2) som samlar alla L, N och Y är en vektor med alla 25 läsningar E_i från elmätaren. Diverse mätningsfel gör att systemet saknar lösning. Man måste nöja sig då med ett approximativt svar som uppfyller något kriterium som kan vara relevant.

Minsta kvadratmetoden föreslår som kriterium att bestämma $\bar{X}$ sådan att $\left|Y - A\bar{X}\right|^2$ är minimum. Dvs att man bestämmer $\bar{X}$ så att felet (avvikelsen) i kvadrat är det minsta möjliga. Allmännt kan uttrycket AX ses som en linjär kombination av samtliga kolonner i A. Att ekvationen $Y - AX$ saknar lösning innebär att Y inte ligger i rummet som spänns upp av A:s kolonner. Det finns delar av Y som är ortogonala till A:s samtliga kolonner. Mera precist, är $Y - AX$ ortogonal till samtliga kolonner i A, vilket kan uttryckas som

$$A^T(Y - AX) = 0.$$

Vi använder den här ekvationen för att bestämma vår $\bar{X}$, dvs att vi söker $\bar{X}$ sådan att

$$\left(A^T A\right)\bar{X} = A^T Y.$$

Detta ekvation har nu n ekvationer och n obekanta (2 i exemplet). Lösningen $\bar{X}$ är entydig om $A^T A$ är inverterbar.

Minimumegenskapen kan ses på följande sätt. För en godtycklig $n-$dimensionell vektor Z kan vi alltid skriva

$$Y - AZ = \left(Y - A\bar{X}\right) + A\left(\bar{X} - Z\right).$$

där $\bar{X}$ är lösningen ovan. De två vektorerna i högerleden är ortogonala, eftersom skalärprodukten ger

$$\left[A\left(\bar{X} - Z\right)\right]^T\left(Y - A\bar{X}\right) = \left(\bar{X} - Z\right)^T A^T\left(Y - A\bar{X}\right) = 0.$$

Vänsterledens storlek kan beräknas då med hjälp av Pythagoras sats som

$$\left|Y - AZ\right|^2 = \left|Y - A\bar{X}\right|^2 + \left|A\left(\bar{X} - Z\right)\right|^2.$$

Storleken antar sitt minimum för $Z = \bar{X}$. Alla andra vektorer Z ger då ett större fel än $\bar{X}$.